**Feuille 8 – Corrigé**

Exercice 1 :

1. , on a

Ainsi,

Il est facile de prouver que est bien linéaire, même si ce n’est pas demandé dans l’exercice.

1. Soit .

On a

D’où

Ainsi .

De plus comme , n’est pas injectif, et donc ni surjectif, ni bijectif.

1. Le théorème du rang donne directement . Ainsi il nous suffit de trouver deux vecteurs de tels que forme une famille libre.

Or on peut voir aisément que la famille est bien libre, elle forme donc une base de l’image de .

1. Dans les faits, on doit seulement montrer que la réunion d’une base de l’image de et d’une base du noyau de est une famille libre. En effet, si l’on y arrive, alors ce sera une base de (au vu de la dimension), et donc elle sera en particulier génératrice de , ce qui nous garantira la décomposition de tout élément de dans . De plus, puisque la famille est libre, on aura aussi , et donc la somme directe.

Soient tels que

On a immédiatement :

Ainsi la famille choisie est libre, et donc s’en suit tout le raisonnement précédent.

Exercice 2 :

1. Supposons que soit le projecteur sur parallèlement à

Soit , alors , tel que .

Alors

1. Soient et deux projecteurs différents et non nuls.

Ainsi, comme et sont non nuls, on a .

1. Supposons que la famille est liée. Alors . Ainsi , donc

. Or car , et car . C’est absurde.

1. Supposons que soit un projecteur. Alors

On en déduit l’égalité demandée.

Ainsi on a , donc :

Ainsi , donc .

Supposons que est un projecteur de . Alors d’après la question précédente, on a bien l’égalité demandée.

Supposons que . Alors :

D’où est bien un projecteur de .